TEOREMA DI TALETE

PROF F. MAFRICA

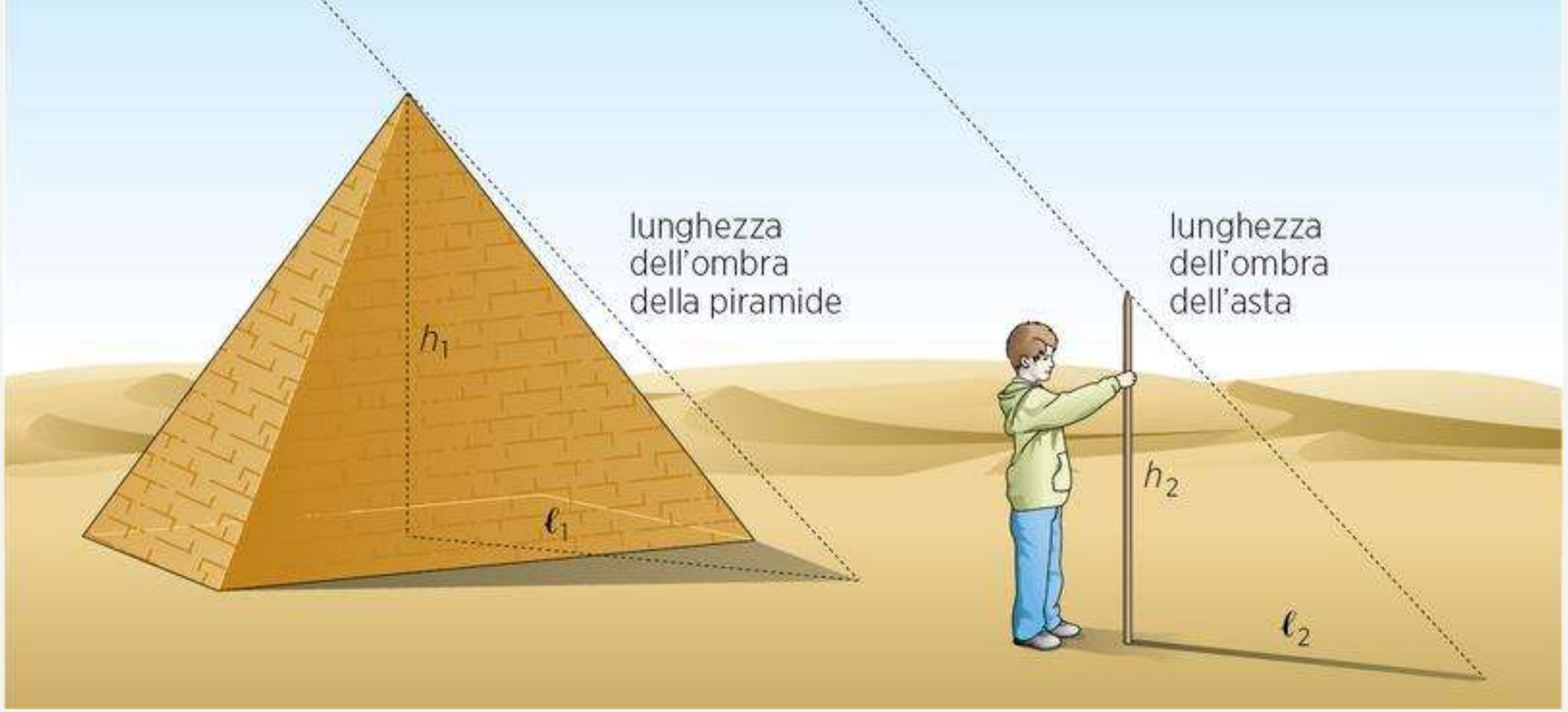
È POSSIBILE MISURARE L'ALTEZZA DI UN MONUMENTO SENZA SALIRCI SOPRA?

In Egitto era severamente proibito ad uno straniero salire su una piramide…

Talete misura la piramide di Cheope

Talete di Mileto, grande matematico e filosofo, fu il primo a riuscirci nel VI secolo a.C., grazie a una felice intuizione.
Egli si accorse, infatti, che la lunghezza di un’ombra proiettata sul terreno dipende dall’altezza dell’oggetto che l’ha originata secondo una relazione matematica ben precisa.
In particolare, se si confrontano le ombre di due oggetti diversi, queste stanno tra loro come le altezze degli oggetti corrispondenti:

lunghezza ombra 1 : lunghezza ombra 2 =
= altezza oggetto 1 : altezza oggetto 2



Conoscendo l'altezza di un'asta usata per il confronto e misurando le lunghezze delle ombre sul terreno, Talete fu in grado di determinare l'altezza della piramide.

Lungh. ombra 1 : lungh. ombra 2 = altezza asta : altezza incognita della piramide

$$\ell_1 : \ell_2 = h_1 : h_2$$

da cui:

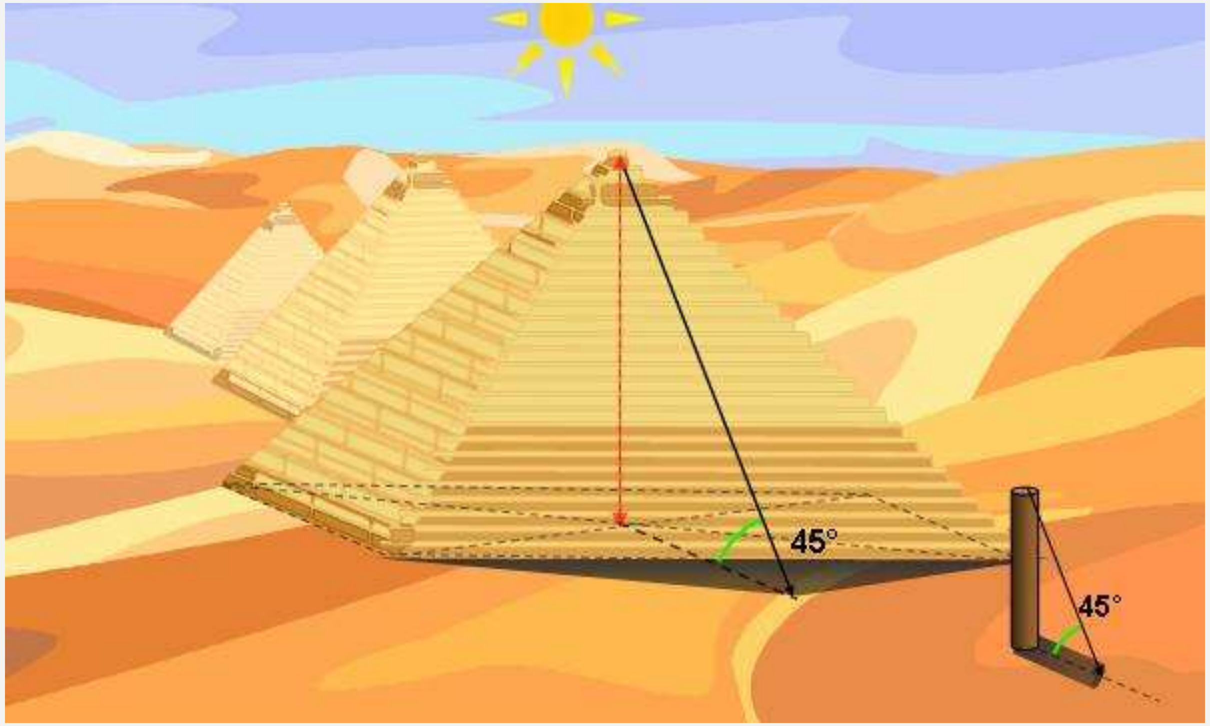
$$h_2 = h_1 \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

l cosiddetto Teorema di Talete, attribuito proprio al filosofo scienziato di Mileto, è la formalizzazione di questa intuizione.

Le lunghezze delle ombre sono direttamente proporzionali alle lunghezze degli oggetti che le hanno prodotte.

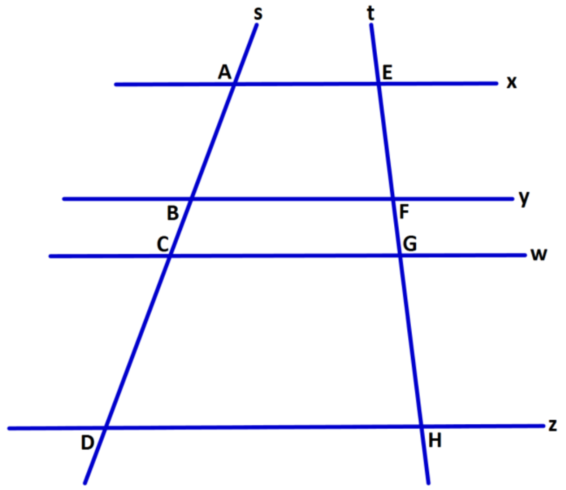
Un fascio di rette parallele individua su due rette trasversali, coppie di segmenti direttamente proporzionali.

Nel caso della misura dell'altezza della piramide, il *fascio di rette parallele* è costituito dai raggi solari, le due trasversali sono la retta a cui appartengono le altezze del bastone e della piramide e la retta che contiene i segmenti - ombre.



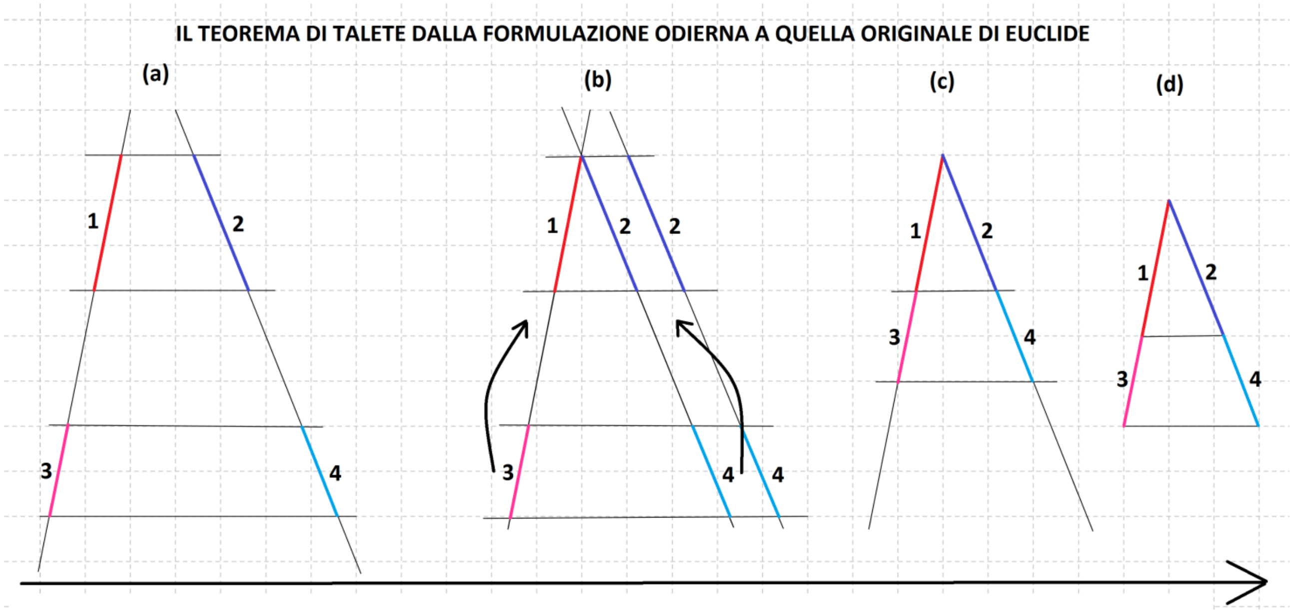
Dal teorema di Talete ai criteri di similitudine dei triangoli
di Luciano Porta

Il teorema di Talete è uno dei più applicati della geometria e il suo enunciato è molto noto:
“Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali genera coppie di segmenti direttamente proporzionali”.



$\boxed{AB : CD = EF : GH}$

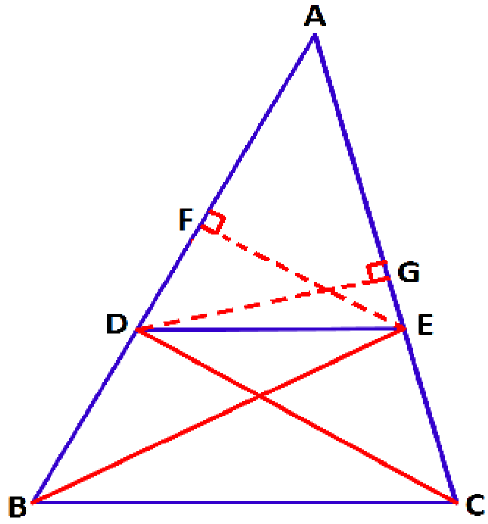
La prima dimostrazione e il primo enunciato del teorema, conosciuto già dai babilonesi prima di Talete, appaiono negli **Elementi di Euclide** (**libro sesto**, **proposizione due**) e sono molto diversi, anche se equivalenti, da quelli solitamente conosciuti.
Euclide centra l’essenza del problema e espone, nella stessa frase, sia l’enunciato diretto, sia quello inverso.
Nella successione delle immagini affiancate **a – b – c – d** possiamo osservare come dall’enunciato attuale del teorema si possa risalire a quello di Euclide.



Ora esponiamo l’**enunciato di Euclide** del cosiddetto **teorema di Talete**:

“Se in un triangolo si traccia una parallela a uno dei sui lati essa divide gli altri due proporzionalmente e se due lati sono divisi proporzionalmente, la retta che unisce i punti di divisione è parallela al terzo lato”.

Le dimostrazioni, sia del teorema diretto, sia di quello inverso, saranno sostanzialmente, con gli opportuni adattamenti, quelle di Euclide.



Dimostrazione del teorema diretto:
Se in un triangolo si traccia una parallela a uno dei sui lati essa divide gli altri due proporzionalmente.

Nel triangolo ABC tracciamo la parallela DE al lato BC. Tracciamo i segmenti BE e CD.
I due triangoli BED e CED sono equivalenti avendo la stessa base DE e la stessa altezza (i segmenti DE e BC sono paralleli).
Quindi il rapporto tra l'area di ciascuno di essi e quello del triangolo ADE è uguale:

1) **A(BDE) : A(ADE) = A(CDE) : A(ADE)**

Consideriamo ora i triangoli BDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza FE, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

2) A(BDE) : A(ADE) = BD : AD

Consideriamo ora i triangoli CDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza DG, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

3) A(CDE) : A(ADE) = CE : AE

Dalla 2) e dalla 3), considerando la 1), si ottiene: **BD : AD = CE : AE**

Dimostrazione del teorema inverso:
Se in un triangolo due lati sono divisi proporzionalmente, la retta che unisce i punti di divisione è parallela al terzo lato.

L'enunciato afferma che:

1) BD : AD = CE : AE

Consideriamo ora i triangoli BDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza FE, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

2) A(BDE) : A(ADE) = BD : AD

Consideriamo ora i triangoli CDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza DG, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

3) A(CDE) : A(ADE) = CE : AE

Dalla 2) e dalla 3), considerando la 1), si ottiene: **A(BDE) : A(ADE) = A(CDE) : A(ADE)** in cui, essendo uguali i conseguenti sono anche uguali gli antecedenti:

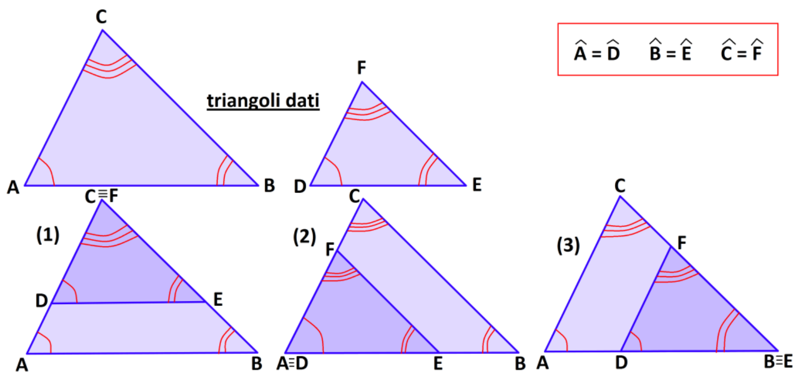
A(BDE) = A(CDE)

I due triangoli considerati sono perciò equivalenti e hanno in comune la base DE.
Devono avere pertanto anche la stessa altezza.
Pertanto i **segmenti DE e BC sono paralleli**.

Criteri di similitudine dei triangoli

Applicando la proposizione due del libro sesto degli elementi di Euclide e i criteri già provati, possiamo dimostrare i **tre criteri** di similitudine dei triangoli.
Ricordiamo che due poligoni sono simili se hanno uguali gli angoli corrispondenti e se hanno i lati corrispondenti proporzionali.

Primo criterio:
Due triangoli sono simili se hanno gli angoli corrispondenti uguali (osserviamo che poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto possiamo non considerare il terzo angolo)



Sovrapponiamo i due triangoli ABC e DEF in modo che siano sovrapposti gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{F}$ (situazione 1).
I lati opposti a questi angoli AB e DE sono paralleli poiché le rette a cui appartengono formano con le trasversali angoli corrispondenti uguali.
Possiamo così applicare la proposizione due del sesto libro degli elementi e scrivere la proporzione:

AD : FD = BE : FE

Applicando la proprietà del comporre:

(AD + FD) : FD = (BE + FE) : FE ,

Pertanto: <u>CA : FD = CB : FE</u>

Sovrapponendo gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ (situazione 2) similmente otteniamo:

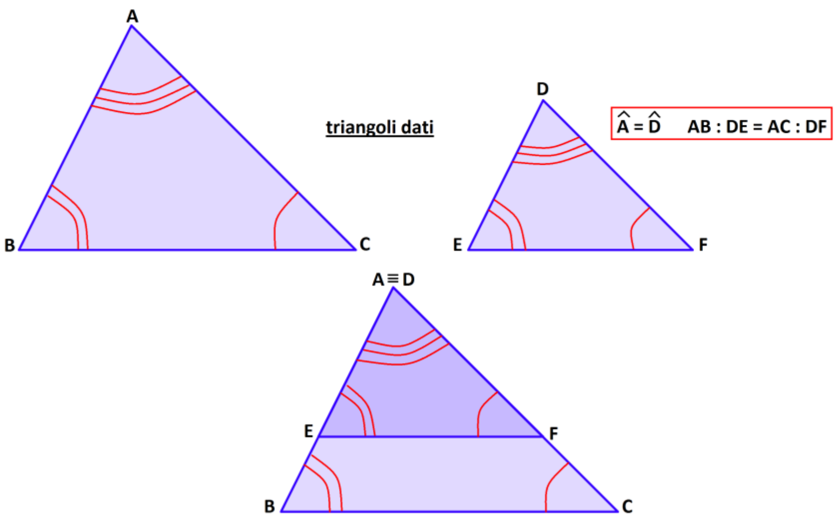
<u>AB : DE = AC : DF</u>

Sovrapponendo gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{E}$ (situazione 3) similmente otteniamo:

<u>AB : DE = CB : FE</u>

Pertanto i triangoli ABC e DEF sono simili perché hanno uguali a 2 a 2 gli angoli e hanno proporzionali i lati che li formano.

Secondo criterio:
Due triangoli sono simili se hanno uguale un angolo e se hanno proporzionali i lati che lo formano.

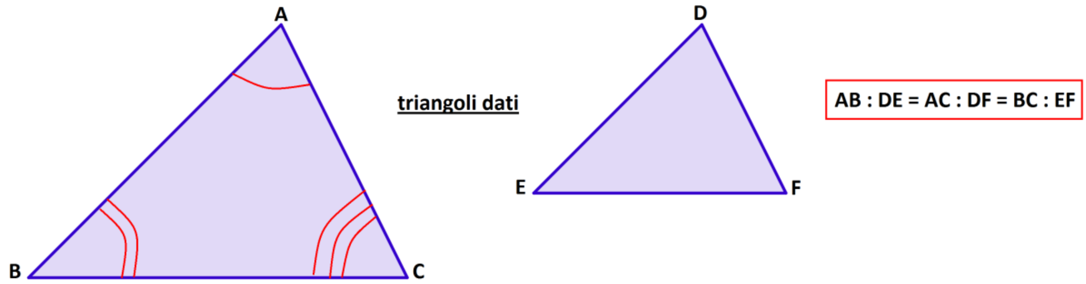


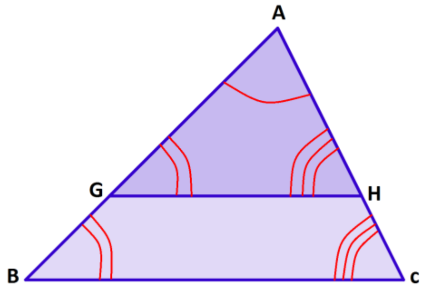
Sovrapponiamo i triangoli ABC e DEF in modo che gli angoli uguali $\hat{A}$ e $\hat{D}$ siano sovrapposti.
I lati che formano questi angoli sono proporzionali e per la parte inversa della proposizione due del libro sesto degli elementi di Euclide i lati BC e EF , opposti agli angoli uguali, sono paralleli.
Quindi gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{E}$ sono uguali perché corrispondenti generati da due parallele tagliate da una trasversale.
Sono uguali per lo stesso motivo gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{F}$.
Pertanto i triangoli considerati hanno gli angoli uguali a due a due, sono simili per il primo criterio e hanno anche gli altri lati corrispondenti proporzionali:

<u>AB : DE = BC : EF</u> e <u>BC : EF = AC : DF</u>

Quindi i triangoli ABC e DEF sono simili perché hanno uguali a due a due gli angoli e hanno proporzionali i lati che li formano.

Terzo criterio:
Due triangoli sono simili se hanno i lati corrispondenti proporzionali.





Traccaimo sui lati AB e AC del triangolo ABC, partendo dal vertice A, due segmenti AG e AH uguali ai lati DE e DF del triangolo DEF e otteniamo il triangolo AGH.
Non possiamo affermare per il momento che i triangoli AGH e DEF sono uguali poiché non sappiamo se gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ sono uguali.
I triangoli ABC e AGH sono simili per il secondo criterio ed essendo simili hanno uguali i rispettivi angoli.
Considerando i triangoli ABC e AGH possiamo allora scrivere la proporzione:

1) <u>AB : AG = BC : GH</u>

Considerando i triangoli ABC e DEF possiamo scrivere la proporzione:

2) <u>AB : DE = BC : EF</u>

Ricordando che AG = DE, possiamo scrivere la 1) nel modo seguente:

1) <u>AB : DE = BC :GH</u>

Per l'unicità del quarto termine della proporzione ne consegue che <u>GH = EF</u> e pertanto i triangoli AGH (simile al triangolo ABC) e DEF sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza.
Per la proprietà transitiva i triangoli ABC e DEF sono simili e hanno uguali a due a due gli angoli e proporzionali i lati che li formano.

Talete

La tradizione fa iniziare il pensiero filosofico con Talete. Di lui abbiamo solo testimonianze indirette. Partiamo da Diogene Laerzio, lo scrittore ci riferisce che Talete era uno dei sette sapienti e visse a Mileto. Ce lo presenta come uno “scienziato”, studiò i corpi celesti e previde un’eclissi di sole”.

Dopo questa presentazione, Diogene tratta del suo pensiero filosofico. Questo “sapiente” riteneva che l’acqua fosse il principio di tutte le cose, e che il mondo è animato e pieno di divinità. Talete riteneva inoltre che il più antico degli enti fosse Dio, *perché non è mai nato e il più bello degli enti fosse il mondo, perché è opera di Dio.*

Dopo questa premessa, Diogene parla di quattro enti (*lo spazio, la mente, la necessità, il tempo*) e della *morte*. Dello spazio afferma che *è l’ente… più grande… perché contiene tutto in sé*; della mente afferma che *è la più veloce…perché corre attraverso tutto*; della necessità che *è la più forte…perché tutto comanda; il tempo svela tutti i segreti e che la morte non differisce in nulla dalla vita.*

Sono pochi concetti, ma importantissimi perché ci permettono di notare il salto qualitativo che il “sapiente” ha ormai intrapreso nella ricerca della Verità.

La concezione del divino: un Dio

Talete ha un concetto della divinità antitetico rispetto alla religione ufficiale, infatti egli non parla più di dei, ma di Dio. Abbiamo già visto che anche Omero ed Esiodo avevano affermato che esisteva un principio del cosmo.
Per questi due poeti non vi è un solo principio originario, ma rifacendosi alla natura dell’uomo che è maschio e femmina, affermano che dall’unione di due forze naturali nacque il cosmo. Talete invece semplifica ancora di più la ricerca, non da due ma da una unità nasce il tutto e questo principio è l’acqua. Il divino inizia a perdere quei caratteri antropomorfi che erano la nervatura in Omero e in Esiodo.

La parte più eccelsa dell’uomo: la mente

Talete si discosta dalla tradizione precedente anche per ciò che riguarda l’uomo quando afferma che *l’ente…più veloce è la mente*. In Talete le qualità eccelse non sono più in un elemento corporeo come nella cultura omerica, infatti Omero chiama Achille “piè veloce”. È la mente, cioè qualcosa di non più totalmente corporeo, adesso, a possedere le qualità più importanti, è proprio grazie alla mente, alla ragione, che l’uomo si distingue dagli animali e può cogliere il cosmo perché esso è stato fatto da un essere razionale e quindi è soltanto la ragione che deve indagare i perché del mondo.

La scoperta di leggi fisse: la necessità

Talete affronta anche il problema della necessità, cioè di leggi fisse ed eterne che non possono essere cambiate a piacere dell’uomo o degli dei. La necessità è la più forte proprio perché è immutabile, *ad essa tutti si devono adeguare.* È un altro colpo all’Olimpo greco fatto di una molteplicità di dei sempre in lotta fra loro, in cui ognuno incarna una forza e quindi una legge naturale. Ora si afferma esplicitamente, non solo per accenni come avevano fatto Omero ed Esiodo, che esiste una legge superiore: la necessità.

La verità come dispiegamento nel tempo del

principio unico

Il filosofo prende in considerazione anche il tempo. Talete afferma che *è l'ente…più saggio…perché svela tutti i segreti*. Questa è una frase di difficile interpretazione, perché sembra in antitesi con quello che ha affermato prima quando ha detto che la mente è la più veloce. Se la mente va totalmente al di là del mondo fisico, questa affermazione sul tempo è contraddittoria, ma dobbiamo ricordarci che per il sapiente il mondo è pieno di divinità. Questo significa che le cose naturali hanno un'anima che è specchio della divinità suprema che è l'acqua, e che questa si dispiega nella natura formando tutti gli enti. Così appare più comprensibile l'affermazione sul tempo. Infatti nel tempo, cioè nella storia, l'ente primo si dispiega costruendo il cosmo, e quando si disvela, l'ente supremo non è al di fuori della natura, ma è esso stesso natura e diversificandosi forma nel tempo il cosmo. Quindi la mente può comprendere il principio ripercorrendo nel tempo il suo dispiegarsi e siccome è la più veloce lo può cogliere al di fuori del tempo cronologico, in un tempo tutto suo, in un tempo interiore, filosofico. La mente in questo modo può ricostruire il passato e può osare prevedere il futuro, così come dimostrato dallo stesso filosofo che aveva previsto un'eclissi di sole.

Una nuova concezione della morte

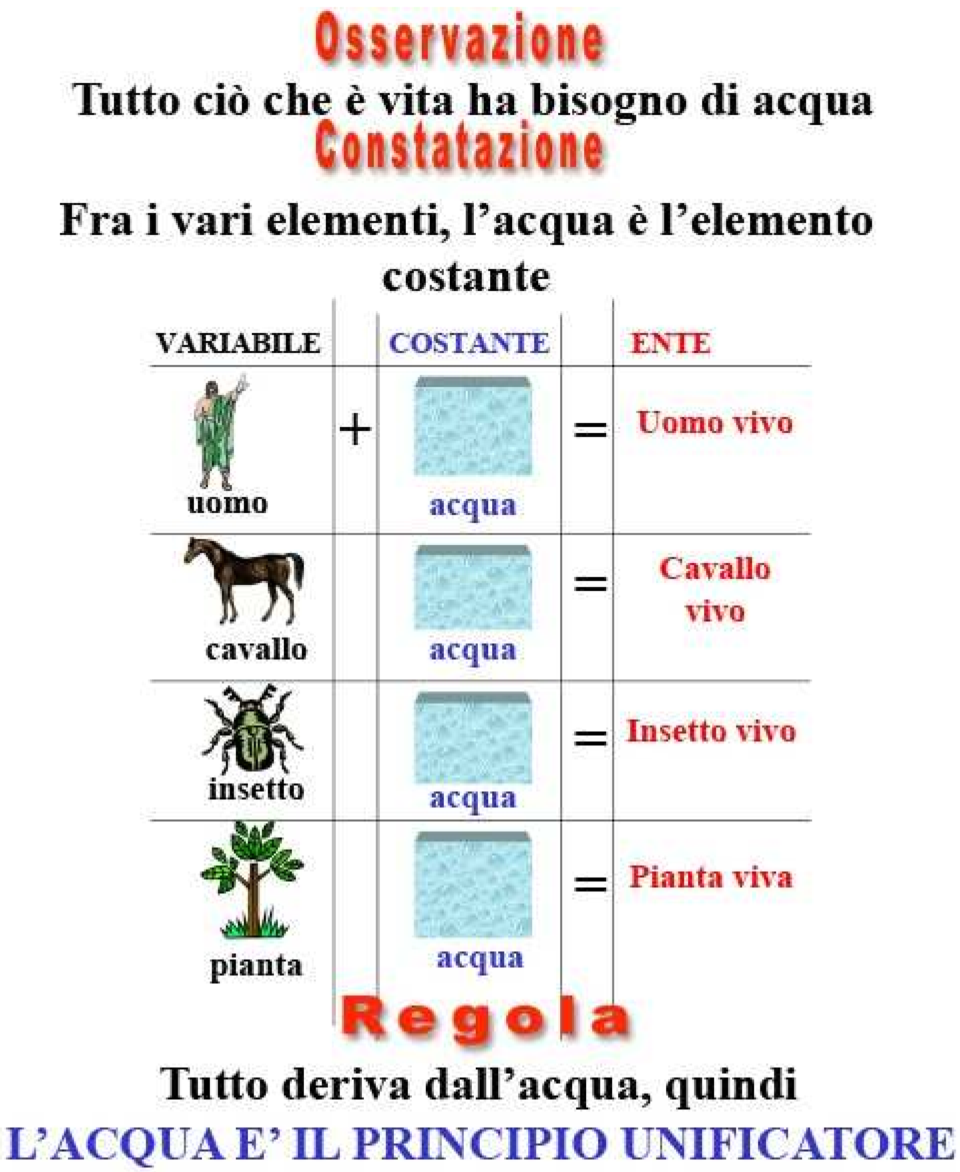
Diversa dalla tradizione è anche il concetto di morte. Infatti Diogene ci dice che per Talete *la morte non differisce dalla vita*. L'unico significato che possiamo trarre e che per il filosofo la morte fisica non spezza la vita, ma essa continua immutata. Dove e come Talete non ce lo dice, ma possiamo immaginare che le facoltà intellettive dovevano resistere oltre la morte. È la fine dell'Ade di Omero e di Esiodo.

La scoperta del principio originario attraverso la ragione: l'acqua

La seconda testimonianza ce la fornisce Aristotele. Da filosofo sistematore della logica, quale Aristotele è stato, cerca di spiegare attraverso quale procedimento *Talete è arrivato ad affermare che l'acqua è il principio del cosmo.* Forse egli è arrivato a questa ipotesi vedendo che tutte le cose traggono nutrimento dall'umidità.

Il suo ragionamento pressappoco dovette procedere in questo modo: *“l’uomo, il cavallo, l’insetto, la pianta, per vivere hanno bisogno di acqua; ora io ho elencato esseri viventi diversi gli uni dagli altri, ed ho accostato ciascuno a l’acqua. L’elemento che rimane costante in questa mia elencazione è quindi l’acqua, infatti proprio essa dà vita e senza di essa nulla può sussistere, perché senza l’acqua ogni cosa morirebbe. Il mio ragionamento, quindi, mi conduce ad affermare che l’acqua è il solo principio vitale e giacché tutto è vita, il principio che regge e da cui deriva il cosmo è appunto l’acqua”.*

Per la prima volta l’osservazione sulla natura non si era trasformata in un nuovo mito, la ma natura è stata spiegata attraverso la ragione.
Il salto definitivo fra mito e logos era ormai compiuto.



Commenti

Non disponi dell'autorizzazione necessaria per aggiungere commenti.